

Leçon 201

Espaces de fonctions. Exemples et applications

I - Espaces des fonctions régulières

II - Espaces L^p

III - Le cas de L^2

Dev 1 : Densité des fonctions continues nulle part
dérivables

Dev 2 : Espace de Bergman

I - Espaces des fonctions régulières

1) Fonctions continues sur un compact : CVS, CVU, CVU $\Rightarrow$ CVS, Heine, $\text{def } \|\cdot\|_\infty$, $C(K)$ Banach séparable, Dini [HL97] ; def équicontinuité, Ascoli [Sai08], app : Cauchy-Peano-Arzela [Ber17]

2) Résultats de densité : Baire, app : [dev 1], def espace séparant, réticulé, réticulé + séparant + cstes $\Rightarrow$ dense, ex : fcts lip, Stone-Weierstrass, app : thm de Weierstrass [HL97]

3) Fonctions plus régulières : $\text{def } C^k(K)$, def/prop norme, limite C^k [El 11], contre-exemple [Hau07], $C^k(K)$ Banach

4) Espace des fonctions holomorphes : def via dérivabilité, distance et top de la CVUSTC, théorème de Weierstrass, complétude, Montel + app [Sai08]

II - Espaces L^p , $p \geq 1$

1) Définition et propriétés : $\text{def } L^p$, $\|\cdot\|_p$, inclusions, Holder, Minkowski, L^p evn, Riesz-Fisher, dualité [BP12]

2) Résultats de densité : Etagées, escalier ou continues à support compact [BP12]

3) Convolution : def , convolution $L^p - L^q$, $L^p - L^1$, régularisation, approx de l'unité [BP12], [Far06]

III - Le cas de L^2

1) Propriétés hilbertiennes : def ps hermitien, Hilbert, parallélogramme, thm de Riesz [BP12], thm de Muntz, [dev 2]

2) Transformée de Fourier : $\text{def } L^1$, règles de calcul, Plancherel, densité de $L^1 \cap L^2$, inversion, automorphisme de Hilbert [El 08]

3) Séries de Fourier : $\text{def } L^2_{2\pi}$, nouvelle norme et ps + toujours Hilbert, Weierstrass trigo, (e^{inx}) base hilbertienne, $\text{def } c_n(f)$ + calcul, théorème de Féjer, théorème de Dirichlet, Parseval, équation de la chaleur [El 08]

Références

- [Ber17] Florent BERTHELIN. *Equations différentielles*. Cassini, 2017.
- [BP12] Marc BRIANE et Gilles PAGÈS. *Analyse théorie de l'intégration : Convolution et transformée de fourier : Cours & exercices corrigés*. Vuibert, 2012.
- [El 08] Mohammed EL AMRANI. *Analyse de fourier dans les espaces fonctionnels niveau M1*. Ellipses, 2008.
- [El 11] Mohammed EL AMRANI. *Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions*. Ellipses, 2011.
- [Far06] Jacques FARAUD. *Calcul intégral*. EDP Sciences, 2006.
- [Hau07] Bertrand HAUCHECORNE. *Les contre-exemples en mathématiques*. Ellipses, 2007.
- [HL97] Francis HIRSCH et Gilles LACOMBE. *Éléments d'analyse fonctionnelle : Cours et exercices*. Masson, 1997.
- [Sai08] Jean SAINT RAYMOND. *Topologie, Calcul Différentiel et variable complexe : Cours et exercices*. Calvage & Mounet, 2008.